PROGRAMAREA LINIARĂ

1. Să se optimizeze:

Forma canonică a problemei de programare liniară este:

$\max F(x, y) = 10 \cdot x + 15 \cdot y$ - funcția de maximizare

$\begin{cases} 12 \cdot x + 13 \cdot y \le 50 \\ 4 \cdot x + 9 \cdot y \le 25 \end{cases}$ - sistem de restricții

$x \ge 0; \quad y \ge 0$

Se modifică problema la notațiile care ne sunt mai familiare:

$\max F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2$ - funcția de maximizare

$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 \le 50 \\ 4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \le 25 \end{cases}$ - sistem de restricții

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Trecerea de la ***forma canonică*** la ***forma standard*** se face prin adăugarea unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții.

În cazul nostru sistemul are **două inecuații**, deci se vor introduce două variabile de egalizare notate: x_3 şi x_4.

$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + x_3 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + x_4 = 25 \end{cases}$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 25 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuații se construieşte matricea A şi b:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 13 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Funcția de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

Se construieşte matricea C:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pentru identificarea soluțiilor oprime se trasează următorul tabel.

pivot   intră în bază   iese din bază   vector de bază

	C_j	10	15	0	0		
C^B	**Baza**	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	**b**	
0	$\mathbf{a_3}$	12	13	1	0	50	50/13=3,84
0	$\mathbf{a_4}$	4	$\boxed{9}$	0	1	25	25/9=2,77
Z_j		0	0	0	0	0	
Z_j-C_j		-10	-15	0	0		
		<0	**<0**	=0	=0		

Completarea tabelului:

- linia C_j din tabel se completează cu valorile din matricea C_j;
- coloanele a_1, a_2, a_3, a_4 din tabel se completează cu valori din matricea A;
- coloana b din tabel se completează cu valorile din matricea b;
- pe coloana cu Baza se trec variabilele suplimentare (de egalizare) cazul nostru a_3 şi a_4 (litere nu valori);
- coloana C^B se completează cu valorile lui a_3 şi a_4 luate din matricea C_j (adică inițial cu zero);
- linia Z_j se completează astfel: $Z_j=C^B \cdot a_i$, adică:

$$C^B \cdot a_1 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 4 = 0$$
$$C^B \cdot a_2 = 0 \cdot 13 + 0 \cdot 9 = 0$$
$$C^B \cdot a_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$
$$C^B \cdot a_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$C^B \cdot b = 0 \cdot 50 + 0 \cdot 25 = 0$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele a_1 şi a_2 valorile –10 şi –15. Deoarece există diferențe (negative) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- pentru stabilirea vectorului care intră în bază se caută maximul diferențelor negative $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-10, -15\right| = \max(10{,}15) = 15$$

Deoarece valoarea 15 (rezultată din $\left|-15\right|$) se găseşte pe coloana a_2 **rezultă că vectorul $\mathbf{a_2}$ intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{b}{a_2}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{13}, \frac{25}{9}\right\} = \min\{3{,}84; 2{,}77\} = 2{,}77$$

ATENȚIE: La numitor se trec componentele vectorului care intră în bază (cazul nostru componentele vectorului $\mathbf{a_2}$).

Deoarece valoarea 2,77 se găseşte pe a doua linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana a_4, rezultă că a_4 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (a_2 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{b}{a_2}\right\} = 2{,}77$ (a doua linie în cazul nostru).

Se completează un nou tabel, astfel:

- linia C_j din tabel se completează cu valorile din matricea C_j;

pivot intră în bază iese din bază vector de bază

	C_j	10	15	0	0		
C^B	**Baza**	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	**b**	
0	$\mathbf{a_3}$	$\boxed{6{,}22}$	0	1	-1,44	13,88	13,88/6,22=2,23
15	$\mathbf{a_2}$	0,44	1	0	0,11	2,77	2,77/0,44=6,29
$\mathbf{Z_j}$		6,6	15	0	1,65	41,55	
$\mathbf{Z_j\text{-}C_j}$		-3,4	0	0	1,65		
		<0	=0	=0	>0		

- pe coloana Bază, deoarece s-a stabilit că a_2 trebuie să intre în bază şi a_4 iese din bază se trece în loc de $a_4 \rightarrow a_2$;
- pe coloana C^B se trec valorile a_3 şi a_2 din vectorul C_j;
- linia pivotului din tabelul anterior se împarte la pivot;
- coloana pivotului (a_2 în cazul nostru) se completează cu 0;
- restul elementelor se cu regula pivotului astfel:

a_1	a_2	a_1^{nou}
m=12	o=13	$\frac{p \cdot m - o \cdot n}{p} = \frac{9 \cdot 12 - 13 \cdot 4}{\boxed{9}} = 6{,}22$
n=4	p=$\boxed{9}$	n/p=4 /$\boxed{9}$= 0,44 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

a_3	a_2	a_3^{nou}
1	13	$\frac{9 \cdot 1 - 13 \cdot 0}{\boxed{9}} = 1$
0	$\boxed{9}$	0 /$\boxed{9}$= 0 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

a_4	a_2	a_4^{nou}
0	13	$\frac{9 \cdot 0 - 13 \cdot 1}{\boxed{9}} = -1{,}44$
1	$\boxed{9}$	1 /$\boxed{9}$= 0,11 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

b	a_2	a_4^{nou}
50	13	$\frac{9 \cdot 50 - 13 \cdot 25}{\boxed{9}} = 13{,}88$
25	$\boxed{9}$	25 /$\boxed{9}$= 2,77 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

- linia Z_j se completează astfel: $Z_j = C^B \cdot a_i$, adică:

$$C^B \cdot a_1 = 0 \cdot 6{,}22 + 15 \cdot 0{,}44 = 6{,}6$$

$$C^B \cdot a_2 = 0 \cdot 0 + 15 \cdot 1 = 15$$
$$C^B \cdot a_3 = 0 \cdot 1 + 15 \cdot 0 = 0$$
$$C^B \cdot a_4 = 0 \cdot (-1{,}44) + 15 \cdot 0{,}11 = 1{,}65$$
$$C^B \cdot b = 0 \cdot 13{,}88 + 15 \cdot 2{,}77 = 41{,}55$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele a_1, a_2, a_3 şi a_4 valorile -3,4; 0, 0; 1,65. Deoarece există o diferență (negativă) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- pentru stabilirea vectorului care intră în bază se caută maximul **DIFERENȚELOR NEGATIVE** $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-3{,}4\right| = \max(3{,}4) = 3{,}4$$

Deoarece valoarea 3,4 (rezultată din $\left|-3{,}4\right|$) se găseşte pe coloana a_1 **rezultă că vectorul a_1 intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{b}{a_1}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{13{,}88}{6{,}22}, \frac{2{,}77}{0{,}44}\right\} = \min\{2{,}23;\ 6{,}29\} = 2{,}23$$

ATENȚIE: La numitor se trec componentele vectorului care intră în bază (cazul nostru componentele vectorului a_1).

Deoarece valoarea 2,23 se găseşte pe prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1". În cazul nostru cifra „1" am găsit-o pe coloana a_3, rezultă că a_3 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (a_1 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{b}{a_1}\right\} = 2{,}23$ (prima linie în cazul nostru).

Se completează un nou tabel, astfel:

- linia C_j din tabel se completează cu valorile din matricea C_j;

vector de bază

	C_j	10	15	0	0		
C^B	**Baza**	**a_1**	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**b**	
10	**a_1**	1	0	0,16	-0,23	2,23	
15	**a_2**	0	1	-0,07	0,21	1,78	
Z_j		10	15	0,55	0,85	49	
Z_j-C_j		0	0	0,55	0,85		
		=0	=0	>0	>0		

- pe coloana Bază, deoarece s-a stabilit că a_1 trebuie să intre în bază şi a_3 iese din bază se trece în loc de $a_3 \rightarrow a_1$;
- pe coloana C^B se trec valorile a_1 şi a_2 din vectorul C_j;
- linia pivotului din tabelul anterior se împarte la pivot;

- coloana pivotului (a_1 în cazul nostru) se completează cu 0;
- restul elementelor se cu regula pivotului astfel:

a_2	a_1	a_2^{nou}
m=0	o=$\boxed{6,22}$	m/o=0 /$\boxed{6,22}$= 0 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
n=1	p=0,44	$\frac{o \cdot n - p \cdot m}{o} = \frac{6,22 \cdot 1 - 0,44 \cdot 0}{\boxed{6,22}} = 1$

a_3	a_1	a_3^{nou}
1	$\boxed{6,22}$	1 /$\boxed{6,22}$=0,16 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
0	0,44	$\frac{6,22 \cdot 0 - 0,44 \cdot 1}{\boxed{6,22}} = -0,07$

a_4	a_1	a_4^{nou}
-1,44	$\boxed{6,22}$	-1,44 /$\boxed{6,22}$=-0,23 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
0,11	0,44	$\frac{6,22 \cdot 0,11 - 0,44 \cdot (-1,44)}{\boxed{6,22}} = 0,21$

b	a_1	b^{nou}
13,88	$\boxed{6,22}$	13,88 /$\boxed{6,22}$ =2,23 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
2,77	0,44	$\frac{6,22 \cdot 2,77 - 0,44 \cdot 13,88}{\boxed{6,22}} = 1,78$

- linia Z_j se completează astfel: $Z_j=C^B \cdot a_i$, adică:

$$C^B \cdot a_1 = 10 \cdot 1 + 15 \cdot 0 = 10$$
$$C^B \cdot a_2 = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 1 = 15$$
$$C^B \cdot a_3 = 10 \cdot 0,16 + 15 \cdot (-0,07) = 0,55$$
$$C^B \cdot a_4 = 10 \cdot (-0,23) + 15 \cdot 0,21 = 0,85$$
$$C^B \cdot b = 10 \cdot 2,23 + 15 \cdot 1,78 = 49$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele a1, a2, a3, a4 valorile 0; 0; 0,55; 0,85. Deoarece nu există o diferență (negativă) Z_j-C_j>0 **rezultă că s-a atins soluția optimă**;

  Soluțiile sunt:

a_1=2,23 sau se scrie x_1=2,23
a_2=1,78 sau se scrie x_2=1,78